

С.В.ОЛЬШАНСКИЙ, НТУ «ХПИ», Харьков

О СКОРОСТИ И ДАЛЬНОСТИ ПОЛЕТА ИСКРЫ, КАК ЧАСТИЦЫ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

В функціях Ейрі побудовано розв'язки рівняння польоту іскри, яка згорас, як легкої сферичної частки змінного радіуса та маси. Виведено компактні формули для обчислення кінематичних характеристик польоту частки за квадратично-поліноміального опору газу, який рухається.

In Airy functions the solutions of the equation of flight a burning spark, as easy spherical particle of variable radius and weight is constructed. The compact formulas for calculation kinematical characteristics of flight a particle are deduced at square-polynomial resistance of motive gas.

Актуальность темы и цель исследования. Летящие, горящие искры являются потенциальным источником зажигания легковоспламеняемых материалов и объектов. Это испаряющиеся нефтепродукты, сельхозобъекты, где хранятся хлопок, солома, сено; участки полей созревших зерновых культур и лесные хвойные массивы в сухое жаркое время года. Поэтому определение кинематических характеристик полета горящих искр является актуальным в обеспечении безопасной жизнедеятельности человека. Эта задача с точки зрения механики сводится к рассмотрению движения частицы переменных размеров и массы. Начало исследований движения тел переменной массы положил И.В. Мещерский [1], что в последующем нашло развитие в [2] и многих других публикациях. Однако в большинстве исследований по механике тел переменной массы внимание сосредоточено на учете переменности массы и движущей реактивной силы. Последняя оказывается очень малой при всестороннем диффузионном сгорании сферического тела, что характерно для сгорающих искр. Здесь главными, влияющими на полет, факторами являются переменность массы и размеров, с чем связано аэродинамическое сопротивление движению. Поэтому изучение движения сгорающих частиц заслуживает отдельного внимания, чему посвящено содержание этой статьи. Целью работы является получение компактных формул для расчета скорости и дальности полета горящей искры в попутно движущемся потоке газа, а также апробация формул путем вычислений.

Основные обозначения и допущения при составлении уравнения движения. Основные упрощения заключаются в пренебрежении действием реактивной силы и веса в системе действующих на частицу сил. Пренебрежение гравитацией не вносит больших погрешностей при рассмотрении полета легких частиц, к которым относятся искры при вылетании их из выхлопных труб ДВС.

Обозначим символом $v = v(t)$ абсолютную скорость полета частицы, а ее значение в момент вылетания из выхлопной трубы – символом v_0 . С этого момента ведем отсчет времени полета t . Поток выхлопного газа в воздухе считаем замедленным, аппроксимируя его скорость выражением

$$V = V(t) = V_0 - at,$$

в котором a, V_0 – положительные постоянные.

Начальную скорость искры принимаем большей, чем скорость газа. При выполнении неравенства $v_0 > V_0$ газовый поток (струя) не разгоняет, а тормозит движение искры, причем будет положительной относительная скорость

$$v_1 = v_1(t) = v(t) - (V_0 - at). \quad (1)$$

Силу аэродинамического сопротивления F_c описываем квадратично-полиномиальной зависимостью

$$F_c = \pi r^2 (k_1 v_1 + k_2 v_1^2),$$

где πr^2 – площадь миделевого сечения частицы; k_1, k_2 – постоянные коэффициенты аэродинамического сопротивления движению.

Таким образом, сила сопротивления меняется не только в связи с изменением относительной скорости, а также – в связи с изменением радиуса r частицы во времени. Далее эту зависимость принимаем в виде

$$r = r(t) = r_0 \sqrt{1 - \varepsilon t},$$

что согласуется с процессом испарения и сгорания капель жидкого топлива [3,4].

Здесь $r_0 = r(0)$ – начальное значение радиуса; $\varepsilon > 0$ – параметр, характеризующий скорость сгорания искры на промежутке времени $t \in [0; 1/\varepsilon]$.

Принимая плотность частицы ρ постоянной, ее массу, как шара, определяем выражением

$$M = M(t) = \frac{4}{3} \pi \rho r^3.$$

Скорость полета искры под действием силы инерции с учетом силы сопротивления будет решением дифференциального уравнения

$$M \frac{dv}{dt} + \pi r^2 (k_1 v_1 + k_2 v_1^2) = 0,$$

которое после сокращения на M принимает вид

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{r} (\delta_1 v_1 + \delta_2 v_1^2) = 0, \quad (2)$$

$$\text{где } \delta_{1,2} = \frac{3k_{1,2}}{4\rho}.$$

Согласно (1) $\frac{dv}{dt} = \frac{dv_1}{dt} - a$. Поэтому из (2) получаем

$$\frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{r} (\delta_1 v_1 + \delta_2 v_1^2) - a = 0. \quad (3)$$

Решение уравнения (3) ищем при начальном условии

$$v_1(0) = v_0 - V_0. \quad (4)$$

Замкнутое решение задачи Коши в функциях Эйри. Перейдем в (3) от переменной t к переменной $\xi = \sqrt{1 - \varepsilon t}$. Поскольку

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{dv_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2\xi} \frac{dv_1}{d\xi}; \quad r = r_0 \xi; \quad \xi(0) = 1,$$

вместо выражений (3) и (4) получаем

$$\frac{dv_1}{d\xi} - \alpha_2 \left(v_1 + \frac{\alpha_1}{2\alpha_2} \right)^2 + \frac{2a}{\varepsilon} \xi + \frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2} = 0; \quad (5)$$

$$v_1(1) = v_0 - V_0; \quad (6)$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{2}{\varepsilon r_0} \delta_{1,2}.$$

Выразим v_1 через вспомогательную функцию $w(\xi)$ по формуле

$$v_1 = -\frac{1}{\alpha_2} w^{-1} \frac{dw}{d\xi} - \frac{\alpha_1}{2\alpha_2}. \quad (7)$$

Этим преобразованием уравнение (5) сводим к виду

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} - \frac{2a\alpha_2}{\varepsilon} \left(\xi + \frac{\alpha_1^2 \varepsilon}{8a\alpha_2} \right) w = 0. \quad (8)$$

Общим решением (8) есть

$$w = c_1 Ai(b\eta) + c_2 Bi(b\eta). \quad (9)$$

Здесь $b = \sqrt[3]{\frac{2a\alpha_2}{\varepsilon}}$; $\eta = \xi + \frac{\alpha_1^2 \varepsilon}{8a\alpha_2}$; c_1, c_2 – произвольные постоянные; $Ai(x)$,

$Bi(x)$ – функции Эйри.

Продифференцировав решение (9) согласно (7), находим, что

$$v_1(t) = -\frac{b}{\alpha_2} \frac{c Ai'(b\eta) + Bi'(b\eta)}{c Ai(b\eta) + Bi(b\eta)} - \frac{\alpha_1}{2\alpha_2}. \quad (10)$$

Здесь $Ai'(x)$, $Bi'(x)$ – производные функций Эйри; $c = c_1 c_2^{-1}$ – произвольная постоянная, которую определяем с помощью начального условия (6), что приводит к выражению

$$c = -\frac{Bi'(\eta_0) + v_* Bi(\eta_0)}{v_* Ai(\eta_0) + Ai'(\eta_0)}, \quad (11)$$

$$\text{где } \eta_0 = \left(\frac{\alpha_1^2 \varepsilon}{8a\alpha_2} + 1 \right) b; \quad v_* = \frac{1}{b} \left(\alpha_2 (v_0 - V_0) + \frac{\alpha_1}{2} \right).$$

Учитывая (1) и (10), получаем формулу скорости полета искры

$$v(t) = V_0 - at - \frac{b}{\alpha_2} \frac{c Ai'(b\eta) + Bi'(b\eta)}{c Ai(b\eta) + Bi(b\eta)} - \frac{\alpha_1}{2\alpha_2}, \quad (12)$$

в которой $\eta = \eta(t) = \frac{\alpha_1^2 \varepsilon}{8a\alpha_2} + \sqrt{1 - \varepsilon t}$.

Функции Эйри и их производные затабулированы в [5], [6]. Поэтому, вы-

числение $v(t)$ можно проводить с помощью таблиц.

Расчет существенно упрощается, если не учитывать замедление скорости потока газа. При $a = 0$ решение уравнения (5) представляется в элементарных функциях и имеет вид

$$v_{1a}(t) = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left\{ \left(1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2(v_0 - V_0)} \right) \exp[\alpha_1(1 - \sqrt{1 - \varepsilon t})] - 1 \right\}^{-1}.$$

Оно удовлетворяет начальному условию (4).

Вычисление пролетаемого искрой пути. Путь S , представляемый интегралом

$$S = \int_0^t v(t) dt, \quad (13)$$

для решения (13) не выражается в замкнутом виде через известные функции. Поэтому для вычисления S в общем случае приходится проводить численное интегрирование. Однако, на начальном участке полета, когда $\varepsilon t \leq 0,5$, а искра является наиболее пожароопасной, можно построить приближенную формулу определения пути. Чтобы получить ее разложим S на два слагаемых

$$S = S_{II} + \Delta S, \quad (14)$$

$$\text{где } S_{II} = \int_0^t v_{1II}(t) dt + V_0 t; \quad \Delta S_n = \int_0^t [v(t) - v_{1II}(t) - V_0] dt.$$

Функцией $v_{1II}(t)$ выше обозначили аппроксимацию $v_1(t)$ на промежутке $t \in [0; 1/(2\varepsilon)]$, которая аналитически интегрируется по t . В качестве такой принимаем

$$v_{1II}(t) = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left[\left(1 + \frac{\alpha_1}{(v_0 - V_0)\alpha_2} \right) \exp\left(\frac{1}{2}\varepsilon\alpha_1 t\right) - 1 \right]^{-1}. \quad (15)$$

Для нее

$$S_{II} = \frac{2}{\varepsilon\alpha_2} \left\{ \ln \left[\left(\frac{(v_0 - V_0)\alpha_2}{\alpha_1} + 1 \right) \exp\left(\frac{1}{2}\varepsilon\alpha_1 t\right) - \frac{(v_0 - V_0)\alpha_2}{\alpha_1} \right] - \frac{\varepsilon\alpha_1 t}{2} \right\} + V_0 t. \quad (16)$$

Второе слагаемое в формуле (14) можно приближенно вычислить по формуле трапеций

$$\Delta S \approx \frac{1}{2} t [v(t) - v_{1II}(t) - V_0]. \quad (17)$$

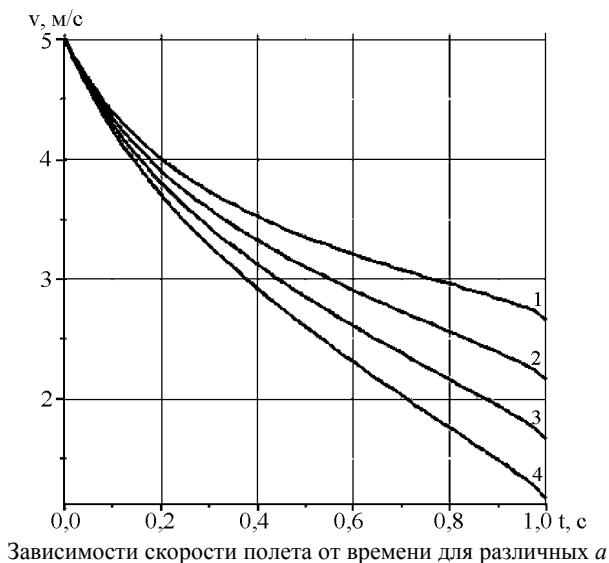
Таким образом, приближенное вычисление пути сводится к применению формул (12), (14), (15), (16) и (17).

Результаты расчетов и выводы. Изучим, как влияет ускорение a на скорость полета искры v , для этого примем следующие исходные данные: $r_0 = 4 \cdot 10^{-4}$ м; $k_1 = 5 \cdot 10^{-1}$ Н·с/м³; $k_2 = 8 \cdot 10^{-1}$ Н·с²/м⁴; $V_0 = 3$; $v_0 = 5$ м/с;

$\varepsilon = 1 \text{ с}^{-1}$; $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$. Цифрами 1,2,3,4 на рисунке обозначены зависимости, полученные для значений $a = 0,5$; 1; 1,5; 2 м/с. С увеличением ускорения, вызывающего уменьшение скорости потока газа, падает скорость искры.

Проверим точность приближенной формулы (14). Для этого сравним результаты, полученные по формуле (14), с результатами численного интегрирования (13). Расчет проведен при $a = 0,5 \text{ м/с}^2$ и предыдущих остальных исходных данных. Результаты расчета представлены в таблице.

Сопоставляя значения дальности полета, полученные численно из (13) и по формуле (14), можно сделать вывод о высокой точности предложенных расчетных формул.



Значения дальности полета S , полученные различными способами

$t, \text{ с}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Числ. инт. (13)	0,467	0,886	1,272	1,634	1,977
По форм. (14)	0,467	0,884	1,269	1,629	1,970

Выводы. Расчетная апробация полученных формул показала, что они приводят к результатам, которые согласуются с физическими представлениями о рассматриваемом процессе. Поэтому, после идентификации входящих в них параметров, формулы могут применяться для расчета кинематических характеристик искры в конкретных условиях полета.

Список литературы: 1. Мещерский И.В. Работы по механике тел переменной массы. – М.: ГИТТЛ, 1952. – 276 с. 2. Космодемьянский А.А. Курс теоретической механики. Ч. 2, 3-е изд. – М.: Просвещение, 1966. – 398 с. 3. Воинов А.Н. Сгорание в быстроходных поршневых двигателях. – М.: Машиностроение, 1977. – 277 с. 4. Абрамчук Ф.И., Марченко А.П., Разлейцев Н.Ф. и др. Со-

временные дизели: повышение топливной экономичности и длительной прочности. – Киев: Техника, 1992. – 272 с. 5. *Абрамовиц А., Стиган И.* Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – М.: Наука, 1979. – 832 с. 6. *Смирнов А.Д.* Таблицы функций Эйри и специальных вырожденных гипергеометрических функций для асимптотических решений дифференциальных уравнений второго порядка. – М.: Изд-во АН СССР, 1955. – 260 с.

Поступила в редколлегию 11.11.2008

УДК 539.3

А.А.ОСЕТРОВ, НТУ «ХПИ», Харьков

ПРИМЕНЕНИЕ RFM И СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИИ К ИССЛЕДОВАНИЮ ЗАДАЧ ИЗГИБА МНОГОСЛОЙНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Розглядається НДС пологих багат шарових оболонок складної форми у плані з різними видами граничних умов. Математична модель задачі уявляє собою систему рівнянь, яка складена відносно прогину, переміщень у площині оболонки та кутів нахилу нормалі до серединної поверхні згідно з уточненою теорією типу Тимошенко для оболонок. Розв'язок поставленої задачі виконується варіаційно-структурним методом з використанням сплайн-апроксимації невизначених компонент структури розв'язку. Отримані чисельні результати ілюструють ефективність запропонованого методу і створеного програмного забезпечення.

A stressed state of laminated shallow shells with complex plan form and different boundary conditions is being investigated. The governing equations for shallow shells are constructed relatively of deflection, displacements and the turn angle of the middle surface of the shell, according to the Timoshenko's-type refined shell theory. The given problem is solved by variation-structural method using spline-approximation in solution structure undefined components. Obtained numerical results illustrate the effectiveness of the offered method and created software.

Область применения тонкостенных композитных конструкций сегодня представляет собой достаточно широкий спектр отраслей, таких как авиа, авто и кораблестроение, космическая техника, гражданское строительство и др. Такая распространенность приводит к закономерной необходимости расчета, как задач статики, так и динамики тонкостенных конструкций, составленных из многослойных материалов. Наиболее часто применяемым методом для решения такого рода задач является метод конечных элементов[1]. Как показывает обзор литературы, большинство авторов ограничиваются расчетом пологих оболочек прямоугольных в плане. В данной работе применен метод R-функций[2], что наряду с применением сплайн-аппроксимации неопределенных компонент позволило получить новые результаты для оболочек сложной формы в плане при разных видах граничных условиях.

1. Математическая постановка. Рассматривается многослойная полая оболочка постоянной толщины h , собранная из произвольного числа однород-